LES NOMBRES RELATIFS

I- Généralité :

On utilise fréquemment les nombres relatifs, notamment en **météorologie**, pour les **températures** en dessous de zéro, en **histoire**, pour dater les événements qui se sont produits avant le début de l'ère chrétienne (notation : avant **Jésus-Christ** [**av. J.-C**.]), en **géographie**, pour mesurer les profondeurs des **fosses sous-marines**, et, bien sûr, en **mathématiques**.

1- Les températures :

Sur une **carte** météo figurent des températures relevées au mois de février. On les a reportées sur le schéma d'un **thermomètre** à mercure gradué en degrés Celsius : il y a les températures au-dessus de zéro, qui sont écrites sans **signe**, et les températures en dessous de zéro, qui sont notées avec un signe « moins » (–).

Les températures **au-dessus de zéro** sont dites **positives** et les températures **en dessous de zéro** sont dites **négatives.** La température 0 est à la fois positive et négative.

2- La frise chronologique :

Vercingétorix soutint le siège des armées de **César** en 52 av. J.-C., à **Gergovie**. Si on place cet événement sur une frise chronologique, il sera situé à gauche de **0** qui **correspond, par convention, au début de l'ère chrétienne.**

En 1492, **Christophe Colomb** atteignait l'Amérique.
En 1969, le 20 juillet, l'astronome **Neil Armstrong** marcha sur la **Lune**.

Ces deux derniers événements sont placés à droite de 0 sur la frise chronologique.

On peut associer à ces trois événements les nombres - 52, 1492 et 1969.

Les dates situées **à gauche de 0** sont repérées par des nombres négatifs ; celles situées **à droite de 0** sont repérées par des nombres positifs.

3- Les montagnes et les fosses marines :

Pour mesurer la hauteur des **montagnes** ou la profondeur des fosses marines, on utilise **pour référence le niveau de la mer.** Ce niveau est repéré par le nombre 0 : les sommets des montagnes sont donc repérés par des nombres positifs et les fonds des fosses marines, par des nombres négatifs.

Exemple :

Le point culminant de l'Afrique se situe en **Tanzanie**, dans le massif du **Kilimandjaro**, à 5 963 mètres ; on le repère par le nombre 5 963 ou + 5 963 ;
au large des **îles Mariannes**, en **Océanie** certaines fosses marines atteignent des profondeurs de 11 000 mètres ; on les repère par le nombre - 11 000.

4- Bilan :

Les nombres relatifs sont les **nombres positifs** et les **nombres négatifs.**
Les nombres positifs sont supérieurs à 0, et les nombres négatifs inférieurs à 0 ; 0 est le seul nombre relatif à la fois positif et négatif.

Les nombres négatifs sont obligatoirement précédés d'un **signe moins** (**-**) dans leur écriture chiffrée usuelle, alors que pour les nombres positifs le signe plus (**+**) est facultatif.

Il existe bien entendu des nombres décimaux relatifs, conçus de façon analogue aux entiers relatifs : **-3,14** ; **8,01** ; etc.

II- Rangement :

Sur une carte météo, on peut lire les températures suivantes : -4 °C ; 0 °C ; +7 °C ; -12 °C ; +3 °C ; -9 °C ; +8 °C ; etc.

Quelle est la température la plus basse ?

Quelle est la plus haute ?

Comment ranger ces températures de la plus basse à la plus haute ?

1- Comparaison :

Les nombres relatifs écrits sous cet axe sont les **abscisses** des points marqués sur la droite.

Par exemple, le point B a pour abscisse -4 ; le nombre +3 est l'abscisse du point A.

Sur cet axe, on considère qu'il y a un **sens de parcours** : de la gauche vers la droite ; ce sens est symbolisé par la flèche. Grâce à ce sens de parcours, on peut dire par exemple que B est **avant** le point A, ce que l'on traduit par -4 est **inférieur** à +3 et que l'on note : $-4 < +3$.

De même, B est avant D, et donc : -4 < -2.

Définition :

Soient A et B deux points d'un axe, d'abscisses respectives a et b. Dire que a est inférieur à b signifie que A est avant B. On note : $a < b$.

2- Application :

Soient a et b deux nombres différents de 0. Si ***a* est négatif** et si ***b* est positif,** alors $a < b$.

Exemples : -25 < +34 ; -0,02 < +3,8.

Soient a et b deux nombres. Si $a < b$, alors $-b < -a$.

Exemples : 12 < 28, c'est-à-dire +12 < +28, donc : -28 < -12 ;
0,18 < 0,2 donc : -0,2 < -0,18.

- Dans l'ordre croissant :

Dans l'ordre croissant signifie du plus petit au plus grand.

Considérons les nombres : -4 ; 0 ; +7 ; -12 ; +3 ; -9 ; +8 (voir les températures données dans l'exemple de l'introduction). On veut ranger ces nombres dans l'ordre croissant.

On cherche le plus petit nombre. C'est **-12** car : -12 < -4 et -12 < 0 et -12 < +7, etc.

On barre -12 de la liste : -4 ; 0 ; +7 ; -12 ; +3 ; -9 ; +8.

On cherche le plus petit nombre parmi ceux qui restent. C'est **-9**.

On barre -9 de la liste : -4 ; 0 ; +7 ; -12 ; +3 ; -9 ; +8.

Et ainsi de suite.

On obtient successivement : **-12** ; **-9** ; -4 ; 0 ; +3 ; +7 ; +8.

Ainsi écrits, ces nombres sont rangés dans l'ordre croissant.

On peut aussi écrire : -12 < -9 < -4 < 0 < +3 < +7 < +8.

Remarque :

On peut aussi commencer par séparer les nombres à ranger en deux groupes : les nombres strictement négatifs : -4, -12, -9, et les nombres positifs : 0, +7, +3, +8 ; on ordonne d'abord les nombres négatifs : -12 < -9 < -4, puis les positifs : 0 < +3 < +7 < +8.

On en déduit que : -12 < -9 < -4 < 0 < +3 < +7 < +8.

- **Dans l'ordre décroissant :**

Dans l'ordre décroissant signifie du plus grand au plus petit.

Reprenons l'exemple précédent. On veut ranger ces nombres dans l'ordre décroissant.

Si l'on connaît la liste des nombres dans l'ordre croissant, il suffit d'écrire cette **liste à l'envers**, ce qui donne : +8 ; +7 ; +3 ; 0 ; -4 ; -9 ; -12 ; ou encore : +8 > +7 > +3 > 0 > -4 > -9 > -12.

Si l'on ne connaît pas la liste des nombres dans l'ordre croissant, on procède comme dans le paragraphe précédent : on commence par chercher le plus grand nombre (+8) ; on le barre de la liste ; on cherche le plus grand nombre parmi ceux qui restent (+7) ; etc.

III- Addition et soustraction :

Aujourd'hui, il fait –5 degrés Celsius dehors. Quand Sophie rentre chez elle, elle constate sur le thermomètre qu'il fait 24 degrés de plus à l'intérieur, soit (–5) + (+24) = 19 degrés.

Lorsque l'on additionne ou soustrait des nombres relatifs, **comment prend-on en compte leur signe ?**

1- Addition :

- **Les deux nombres sont de même signe :**

a- Règles de calcul :

La somme de deux nombres positifs est positive ;
la somme de deux nombres négatifs est négative ;
la distance à zéro de la somme de deux nombres de même signe est la somme des distances à zéro de ces nombres.

Exemples :

(+7) + (+2) = +9. En effet, (+7) et (+2) étant positifs, le résultat est positif. On obtient 9 en effectuant 7 + 2.

(-4) + (-6) = -10. En effet (-4) et (-6) étant négatifs, le résultat est négatif. On obtient 10 en effectuant 4 + 6.

- **Les deux nombres sont de signes différents :**

b- Règles de calcul :

Le signe de la somme de deux nombres de signes différents est le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro ;
la distance à zéro de la somme de deux nombres de signes différents est la différence des distances à zéro de ces nombres (la plus grande moins la plus petite).

Cas particulier : la somme de deux nombres opposés est égale à 0. Par exemple, (-7) + (+7) = 0.

***Exemples* :**

(+9) + (-4) = +5. En effet, des nombres (+9) et (-4), c'est (+9) qui a la plus grande distance à zéro et qui donne son signe + au résultat. On obtient 5 en effectuant 9 - 4.

(+2) + (-8) = -6. En effet, dans ce deuxième exemple, c'est (-8) qui a la plus grande distance à zéro et qui donne son signe « **–** » au résultat. On obtient 6 en effectuant 8 - 2.

2- Soustraction :

a- Règle de calcul :

Soustraire un nombre revient à additionner son opposé.

Exemples :

Pour soustraire (+5), on additionne (-5).

Ainsi : (-4) - (+5) = (-4) + (-5) ; on calcule ensuite selon les règles du paragraphe 1 ; donc : (-4) – (+5) = (-4) + (-5) = -9.

Pour soustraire (-3), on additionne (+3).

Ainsi : (-8) - (-3) = (-8) + (+3) = -5.

IV- Comparaison :

Un nombre strictement positif est plus grand que 0 ; un nombre strictement négatif est plus petit que 0. Quant à 0, c'est le seul nombre qui soit à la fois positif et négatif.

Comment comparer deux nombres relatifs quelconques ?

1- Comparaison des nombres décimaux :

- Les deux nombres sont de signes différents :

Tout nombre positif est plus grand que tout nombre négatif.

Exemple **:** –19,3 < 3,49.

- Les deux nombres sont positifs :

Premier cas : si les deux nombres ont des parties entières différentes, ils sont rangés dans le même ordre que leurs parties entières.

Exemple **:** on veut comparer 3,57 et 2,94.

3 > 2 donc 3,57 > 2,94.

Deuxième cas :

Si les deux nombres ont la même partie entière, on réécrit les parties décimales avec le même nombre de décimales (en complétant éventuellement avec des 0). Les deux nombres sont alors rangés dans le même ordre que les parties décimales.

Exemple : on veut comparer 13,84 et 13,838.

On a 13,84 = 13,840. On compare alors les parties décimales, c'est-à-dire 840 millièmes et 838 millièmes :
840 > 838 donc 13,84 > 13,838.

- Les deux nombres sont négatifs :

Les deux nombres sont rangés dans l'ordre contraire de leurs opposés.

Exemple : on veut comparer –54,93 et –54,947.

On compare leurs opposés, soit 54,93 et 54,947 : 54,93 < 54,947
On a donc : –54,93 > –54,947.

2- Comparaison des nombres fractionnaires :

a- Cas particuliers :

Premier cas : si les deux nombres n'ont pas le même signe, le nombre positif est plus grand que le nombre négatif.

Exemple : on veut comparer $\frac{-107}{289}$ et $\frac{458}{1993}$.

On a : $\frac{107}{289} < \frac{458}{1993}$.

Deuxième cas : si les deux nombres ont le **même** dénominateur positif, alors ils sont rangés dans le même ordre que leurs numérateurs.

Exemple : on veut comparer $\frac{-13}{23}$ et $\frac{-11}{23}$.

Ces deux nombres ont le même dénominateur positif (23) et $-13 < -11$.

On a donc : $\frac{-13}{23} < \frac{-11}{23}$.

Troisième cas : si les deux nombres ont le **même numérateur positif**, ils sont rangés dans l'ordre contraire de leurs dénominateurs.

Exemple : on veut comparer $\frac{17}{29}$ et $\frac{17}{23}$.

Ces deux nombres ont le même numérateur positif et $29 > 23$.

On a donc : $\frac{17}{29} < \frac{17}{23}$.

b- Cas général :

Règle :

Pour comparer deux nombres donnés en écriture fractionnaire, on peut les réduire au même dénominateur positif **puis** comparer les nouveaux numérateurs. Les deux nombres sont alors rangés dans le même ordre que les nouveaux numérateurs.

Exemple 1 : on veut comparer : $\frac{-7}{15}$ et $\frac{-9}{19}$.

On les réduit au même dénominateur positif : $\frac{-7}{15} = \frac{-7 \times 19}{15 \times 19} = \frac{-133}{285}$ et $\frac{-9}{19} = \frac{-9 \times 15}{19 \times 15} = \frac{-135}{285}$.

On compare ensuite les numérateurs : $-133 > -135$.

On a donc : $\frac{-7}{15} > \frac{-9}{15}$.

Exemple 2 : on veut comparer : $\frac{13}{-3}$ et $\frac{-17}{4}$.

On fait en sorte que les deux dénominateurs soient positifs : $\frac{13}{-3} = \frac{-13}{3}$

On réduit les deux fractions au même dénominateur positif : $\frac{-13}{3} = \frac{13 \times 4}{3 \times 4} = \frac{-52}{12}$ et $\frac{-17}{4} = \frac{-17 \times 3}{4 \times 3} = \frac{-51}{12}$.

On compare ensuite les numérateurs : $-52 < -51$.

On a donc : $\frac{13}{-3} < \frac{-17}{4}$.

***Remarque* :** on aurait pu aussi, à l'aide d'une calculatrice, chercher une valeur approchée de chaque nombre et comparer ces valeurs approchées.

$\frac{13}{-3} \approx -4,33$ et $\frac{-17}{4} \approx 4,25$ or $-4,33 < -4,25$ donc $\frac{13}{-3} < \frac{-17}{4}$.